Matemática A 11.º ano
Tema: Funções Trigonométricas
Professora: Susana Fernandes

1. Considera a função f de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 4sen\left(\frac{x}{3}\right)$.

1.1. Determina o contradomínio da função.

1.2. Prova que f é uma função periódica de período 6π.

1.3. Prova que $f(-a) - f(a + 6\pi) = 8sen\left(\frac{a}{3}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

2. Considera a função g de domínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = 10 + 2cos(4x)$.

2.1. Determina o contradomínio de g.

2.2. Indica o valor lógico da proposição seguinte: "A função g não tem zeros."

2.3. Mostra que a função é par.

2.4. Prova que g é uma função periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

2.5. Explica como podes obter uma representação gráfica da função g a partir do gráfico da função $y = cosx$.

3. Verifica que são periódicas de período P as funções:

3.1. $f(x) = sen(2x), \quad P = \pi$

3.2. $g(x) = cos\left(4x - \frac{\pi}{5}\right), \quad P = \frac{\pi}{2}$

3.3. $h(x) = tg\left(\frac{x}{3}\right), \quad P = 3\pi$

3.4. $j(x) = cos(ax + b), \quad a \neq 0, \quad P = \frac{2\pi}{a}$

4. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

4.1. Prova que f é uma função periódica e indica o período positivo mínimo.

4.2. Determina uma expressão geral dos zeros de f.

4.3. Mostra que $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Considera a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + \frac{1}{2}sen\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$.

5.1. Prova que f é uma função periódica de período 2.

5.2. Calcula $f(-2) - 2f\left(-\frac{5}{3}\right)$.

6. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = cos^2\left(\frac{x}{12}\right) - sen^2\left(\frac{x}{12}\right)$.

6.1. Mostra que $g(x) = 2cos^2\left(\frac{x}{12}\right) - 1$.

6.2. Calcula $g(-3\pi) - g(6\pi)$.

7. Considera a função g definida por $g(x) = \frac{cos^2x - sen^2x}{1 - tgx}$.

7.1. Determina o domínio da função g.

7.2. Prova que $\forall \alpha \in D_g, \quad g(\alpha) = cos\alpha(cos\alpha + sen\alpha)$.

7.3. Sabendo que $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}$ e $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcula $g(\alpha)$.

8. Um navio encontra-se atracado num porto. A distância h de um dado ponto do casco do navio ao fundo mar varia com a maré. Admite que h é dada, em função do tempo t, por $h(t)=12-4cos(2t)$.

8.1. Prova que h é dada, em função periódica de período π.

8.2. Determina a distância do ponto do casco do navio ao fundo do mar no momento da maré baixa.

9. Considera a função f definida por $f(x)=sen^2x\left(tgx+\frac{1}{tgx}\right)$.

9.1. Determina o domínio da função.

9.2. Prova que $\forall x \in D_f, f(x)=tgx$.

10. Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=senx$. O contradomínio da função f é o intervalo de números reais $[-1,1]$.

Considera, ainda, as funções:

- $g(x)=\sin(x)+2$
- $h(x)=\sin(x+2)$
- $j(x)=3\sin(x)$
- $i(x)=\frac{1}{3}\sin(x)$
- $p(x)=\sin(4x)$
- $l(x)=\sin\left(\frac{x}{4}\right)$

Apenas três das seis funções têm contradomínio diferente do de f.

Identifica-as.

Na tua resposta deves explicar como se pode obter o gráfico de cada uma destas seis funções a partir da função f, bem como indicar o contradomínio das três funções que têm contradomínio diferente do de f.

11. Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=1-\frac{1}{2}cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

11.1. Determina o contradomínio da função.

11.2. Determina o valor exato de $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2f(-\pi)$.

11.3. Explica como podes obter uma representação gráfica da função f a partir do gráfico da função $y=cosx$.

12. Considera a função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=\frac{sen(2x)}{3}$.

12.1. Determina uma expressão geral dos zeros de g.

12.2. Prova que g é uma função periódica e indica o período positivo mínimo.

13. Considera a função h definida por $h(x)=3tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

13.1. Determina o domínio da função.

13.2. Determina uma expressão geral dos zeros.

13.3. Prova que h é uma função periódica de período 2π.

14. Considera a função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=tgx+\frac{1}{tgx}$.

14.1. Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f(x) = 2$. Determina $cosx$.

14.2. Prova que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, f(x) = \frac{1}{senxcosx}$.

15. Determina $2g\left(-\frac{\pi}{3}\right) + g\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + g\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ sendo g a função definida por:

15.1. $cosx$

15.2. $sen(2x)$

16. Num certo dia de verão, a temperatura, em graus Celsius, dentro de uma determinada habitação, é dada por: $f(t) = 24{,}5 + 2{,}5cos\left[\frac{\pi(t+9)}{12}\right]$, onde t designa o tempo, em horas, contado a partir das zero horas desse dia.

16.1. Determina a temperatura, dentro dessa habitação, às 13 horas desse dia. Apresenta o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.

16.2. Indica as temperaturas mínima e máxima registadas dentro dessa habitação nesse dia.

17. Calcula o valor exato de:

17.1 $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

17.2 $\dfrac{\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

17.3 $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{18}\right) - \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

17.4 $\dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

18. Mostra que:

18.1 $\cos(\pi - \alpha) - 2\sin(\alpha - \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 3\sin\alpha - \cos\alpha$

18.2 $\tan(3\pi + \alpha) + \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} - \tan(-\pi - \alpha) = \tan\alpha$

18.3 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - 3\pi) + 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin(\pi + \alpha) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -5\cos\alpha$

19. Considera $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $tg(-\alpha) = 2$. Determina o valor exato de $cos(\alpha - \pi) - cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

20. Considera $\alpha \in]\pi, 2\pi[$ tal que $4cos(\alpha + \pi) = 1$. Determina o valor exato de $tg(\alpha - 3\pi) - sen(-\alpha - \pi)$.

21. Considera $\alpha \in]-2\pi, -\pi[$ tal que $sen\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{5}{8}$. Determina o valor exato de $cos\left(-\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + tg(-\alpha)$.

22. Determina o valor exato de α.

22.1.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=a-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

22.2.

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)-2\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2a-\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$$

22.3.

$$a\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$$

22.4.

$$a\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+a\cos(-\pi)=\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

23. Considera $\alpha \in \left]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $2tg\alpha + 5 = 0$. Determina o valor exato de $2sen\alpha - sen\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

24. Determina o valor exato de:

24.1. $$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{47\pi}{6}\right)-2\cos(-21\pi)$$

24.2. $$\tan\left(\frac{43\pi}{4}\right)-2\cos\left(-\frac{55\pi}{6}\right)+3\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$$

24.3. $$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{23\pi}{4}\right)-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{127\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\tan\left(-\frac{41\pi}{3}\right)$$

25. Sabe-se que α é um ângulo agudo e que $cos\alpha + \frac{1}{4cos\alpha} - 1 = 0$. Determina o valor exato de $sen\alpha \times tg\alpha$.

26. Relativamente a dois ângulos α e β, sabe-se que $2\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ e $cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Determina o valor exato de $sen(\alpha - \beta)$.

SOLUÇÕES

1.1. $[-2\,,\,6]$

2.1. $[8\,,\,12]$ **2.2.** Verdadeira

2.5. O gráfico da função g pode ser obtido a partir do gráfico da função $y=\cos x$ pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$, seguida pela dilatação vertical de coeficiente 2 e, finalmente, pela translação de vetor $\vec{u}\,(0\,,\,10)$.

Questão 4

$\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Questão 5

$-\frac{7}{4}$

Questão 6

1

Questão 7

$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\frac{28}{25}$

Questão 8

8

Questão 9

$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Questão 10

Apenas as funções g, j e i têm contradomínios diferentes do de f, sendo estes:

$D'_g=[1\,,\,3]$; $D'_j=[-3\,,\,3]$ e $D'_i=\left[-\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}\right]$

Questão 11

$\left[\frac{1}{2},\,\frac{3}{2}\right]$ $-\frac{5}{4}$

Questão 12

Questão 14

O gráfico de f pode obter-se a partir do gráfico da função $y = \cos x$, percorrendo a seguinte sequência de etapas:

(i) Translação de vetor $\vec{u}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

(ii) Contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$

(iii) Reflexão de eixo Ox

(iv) Translação de vetor $\vec{v}(0, 1)$

Questão 13

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ π

$x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

Questão 15

$\frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

$\frac{-3\sqrt{3} + 2}{2}$

Questão 16 Questão 17

$26{,}7\ °\mathrm{C}$

$-\sqrt{2}$ 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$22\ °\mathrm{C}$ e $27\ °\mathrm{C}$

$\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

Questão 19

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Questão 20 Questão 21

$\frac{5\sqrt{15}}{4}$ $\frac{13\sqrt{39}}{40}$

Questão 22

$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}$ $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{3} - 2$

Questão 23

$\frac{8\sqrt{29}}{29}$

Questão 24

2 $-1 + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 7

Questão 25 Questão 26

$\frac{3}{2}$ $\frac{4}{5}$